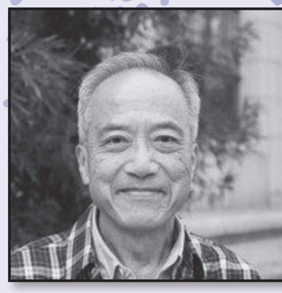
از حساب به جبر

جبر، حساب تعمیم‌یافته است[1]
چگونه حساب را بهتر درس دهیم؟



● هانگ هسی وو

مترجمان:

● **امیرحسین اصغری**؛ دانشیار دانشگاه جان مورس لیورپول انگلیس

● **نازنین حسن‌نیا**؛ دبیر ریاضی تهران

برنامهٔ ریاضیات مدرسه‌ای ساختاری طبیعی دارد: از مفاهیم ساده، به پیچیده و از مفاهیم ملموس به مفاهیم مجرد و مصنوع رشد می‌کند. غیر از این نمی‌تواند باشد؛ چون مهم‌ترین کارکردش این است که دانش‌آموزان را کمک و هدایت کند تا اولین گام‌هایشان را برای یادگیری ریاضی بردارند. فراموش نکنیم که دانش ریاضی هم، در طول تاریخش از ساده به پیچیده رشد کرده است.

متأسفانه در روند تکامل ریاضیات مدرسه‌ای[2]، گسست‌های نالازمی وجود دارند که یادگیری دانش‌آموزان را مختل می‌کنند. یک نتیجهٔ این گسست، ترس و دلهره‌ای‌ست که دانش‌آموزان از یادگیری جبر دارند. موضوع این نوشته، گسستی است که در عبور از موضوع حساب به جبر در ریاضیات مدرسه وجود دارد. در اینجا منظور از «حساب» مباحثی است که به عددهای صحیح، اعشاری‌های با بسط متناهی و عددهای کسری مربوط می‌شود و «جبر» همان جبر مقدماتی‌ای است که در ریاضیات مدرسه‌ای وجود دارد و موضوعاتی را مانند عددهای گنگ، استفادهٔ گسترده از نمادهای ریاضی، معادلات خطی یک یا دو متغیره و معادلهٔ درجهٔ دوم، شامل می‌شود. در اینجا به مفاهیم پیچیده‌تر جبری مانند توابع نمایی و لگاریتمی، یا عملیات جبری روی چندجمله‌ای‌ها [اشمید و وو (۲۰۰۸)، وو (۲۰۱۶b) و وو (در دست انتشار) را ببینید] کاری نداریم؛ در عوض به دو شاخصهٔ مهم ریاضیات مدرسه‌ای، یعنی تعمیم و تجرید می‌پردازیم. اجازه دهید به جای اینکه وقتمان را صرف تعریف دقیق مفاهیم اخیر کنیم، بحث را ادامه دهیم. مفهوم دقیق این واژه‌ها در مسیر بحث، آشکار خواهد شد.

پیام اصلی این نوشته آن است که جبر مدرسه‌ای در واقع، همان حسابِ تعمیم‌یافته است. احتمالاً در این لحظه خواننده برداشت خودش را از عبارت حسابِ تعمیم‌یافته دارد. در ادامهٔ متن، تا حد امکان توضیح می‌دهم، منظور از حسابِ تعمیم‌یافته چیست. حساب با محاسبات دقیق روی عددهای مشخص و معلوم سروکار دارد. به‌طور معمول، ریاضیات مدرسه‌ای طوری تدریس می‌شود که دغدغهٔ اصلی دانش‌آموزان در ریاضی، انجام دادن تمرین‌هاست. به این معنی که به‌دست‌آوردن جواب درست ۶۷-۱۵۱ یا $\frac{۳}{۸}+\frac{۵}{۶}$ برایشان راضی‌کننده است و به دنبال چیزی ورای جواب نیستند. **اما جبر، اولین برخورد دانش‌آموزان با ریاضیات به معنی واقعی کلمه است و تازه اینجاست که شمایی از «تصویر اصلی» [ریاضیات] را می‌بینند.**

در جبر از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که بعد از انجام هر محاسبه، به این فکر کنند که: آیا این محاسبه، حالت خاصی از یک قانون عمومی است یا نه؟ یا اینکه آیا می‌شود این محاسبه را در زمینه‌ای گسترده‌تر دید تا شاید ویژگی‌های آن بهتر درک شود؟ حالا دانش‌آموزی که در حوزهٔ حساب به‌خوبی کارش را انجام می‌داد و از نتیجه راضی بود، باید توجیه شود که چرا باید خودش را برای حساب تعمیم‌یافته آماده کند. در واقع چرا باید به این دردسر بیفتد.

هر برنامهٔ درسی که بخواهد گذار دانش‌آموزان را از (حوزه) حساب به جبر هموار کند، باید جوابی برای این سؤال داشته باشد. اما چه جوابی می‌توان به این سؤال داد؟

برای پاسخ به این سؤال، دو مسئلهٔ جبری را بررسی می‌کنیم: یکی مسئلهٔ حاصل جمع متناهی جمله از یک سری هندسی و دیگری حل یک معادله از درجهٔ یک. امیدواریم که در خلال این بحث، ماهیت حساب تعمیم‌یافته هم مشخص‌تر شود. پیشاپیش می‌گویم بحث پیش‌رو مقداری محاسبات دقیق ریاضی دربردارد، با اینکه در مقالاتی از این دست مرسوم نیست؛ البته این مقدار ریاضی برای پیشبرد بحث ضروری است. همچنین نمی‌توان از این واقعیت فرار کرد که قلب بحث‌های آموزش ریاضی، ماهیت ریاضی دارد.

فرض کنید از یک کلاس هشتمی خواسته‌ایم حاصل عبارت زیر را به دست آورد (استفاده از ماشین حساب مجاز است).

$۱+۳+۳^۲+...+۳^{۱۰}$

حساب به ما می‌گوید حاصل این جمع ۸۸۵۷۳ است و تمام. ولی آیا این مسئله یک مسئلهٔ خیلی خاص محاسباتی است؟ یا اینکه مثلاً گروهی مسئلهٔ شبیه به آن وجود دارد؟ آیا می‌توان راه‌حل این مسئله را جزئی از یک قانون عمومی به حساب آورد؟ هشتمی‌ها ابتدا باید متوجه الگو یا ساختار موجود در این جمع شوند: توان‌های متوالی عدد ۳ با هم جمع شده‌اند. (فرض کنیم آن‌ها می‌دانند که $۳^۰=۱$ و $۳^۱=۳$). اولین چیزی که به ذهن می‌رسد این است که می‌توان حاصل جمع توان‌های عدد ۳ را نه‌تنها تا ۱۰، بلکه تا هر توان طبیعی دیگری حساب کرد. بعد، چرا توان‌های عدد۳؟ چرا توان‌های عددهای دیگر نه؟ همین که این سؤالات به ذهن می‌رسند، یعنی حساب را پشت سر گذاشته‌ایم. می‌خواهیم حاصل جمع توان‌های متوالی عددی را که نمی‌دانیم چند است، تا توانی که نمی‌دانیم چند است، حساب کنیم. حساب و کتاب با عددهای مشخص هیچ کمکی به ما نمی‌کند. حتی قبل از اینکه شروع به حل کنیم، با مسئله‌ای مهم‌تر روبه‌رو می‌شویم: عبارتی که این قدر کلی است (حاصل جمع توان‌های متوالی عددی که نمی‌دانیم چند است، تا توانی که نمی‌دانیم چند است) را چطور به شکلی خلاصه‌تر و در عین حال دقیق بیان کنیم؟

اینجا می‌توانیم به کلاس‌هشتمی‌ها بگوییم که ریاضی‌دانان قدیم بیش از هزار سال درگیر این موضوع بودند که چطور چنین مسئلهٔ کلی‌ای را بیان کنند. تا اینکه حدود ۱۶۰۰ میلادی، بالاخره روشی کارا پیدا کردند تا به کمک نمادها، این‌گونه عبارت‌ها را بیان کنند. با این دستاورد ریاضی، مسئله را به این شکل مطرح می‌کنیم: حاصل جمع $۱+r+r^۲+...+r^{n-۱}+r^n$ را بیابیم، وقتی که r و n عددهای دلخواه ($n \in \mathbb{N}$) باشند. با صرف‌نظر کردن از کار با عددهای معلوم و مشخص، تنها ابزاری که برای حل این مسئله داریم، خاصیت شرکت‌پذیری و جابه‌جایی دو عمل جمع و ضرب و نیز خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع است که می‌دانیم برای همهٔ عددها درست است، و فرقی نمی‌کند که آن عددها معلوم‌اند یا مجهول. این مسئله به کلاس‌هشتمی‌ها کمک می‌کند تا شاید برای اولین بار به اهمیت قوانین عملگرهای جمع و ضرب پی ببرند.

به جای اینکه مدتی طولانی را صرف این مسئلهٔ کلی کنیم، شاید بهتر باشد که مرحله‌به‌مرحله پیش برویم و ابتدا حاصل جمع $۱+۳+۳^۲+...+۳^{۲۴}$ را حساب کنیم. این عبارت، حاصل جمع ۲۵ عدد مشخص و معلوم است و بنابراین شبیه یک مسئلهٔ حساب متداول است. اما از آنجا که انجام این محاسبات با دست خالی، به صبر و حوصله‌ای بیش از توانِ کلاس‌هشتمی‌ها نیاز دارد، پس به چیزی بیش از مهارت‌های متداولِ حساب نیاز داریم تا آن را حل کنیم. یک راه پرداختن به این مسئله آن است که کل این عبارت را به‌صورت یک عدد ببینیم؛ نمی‌دانیم این عدد دقیقاً چند است، با این حال نام آن را S می‌گذاریم. بی‌درنگ از مزایای این نمادگذاری بهره‌مند می‌شویم. این یک قدم بسیار مهم است، چون با این کار، ما دیگر درگیر محاسبات قدیمی نیستیم که می‌باید جواب هر عملیات را به صورت عددی مشخص محاسبه می‌کردیم و قدم‌به‌قدم پیش می‌رفتیم. حالا محاسباتمان را با S به‌عنوان یک عدد پیش می‌بریم. از آنجا که S جمع توان‌های متوالی عدد ۳ است، انگار بد نیست ۳ را در S ضرب کنیم. به کمک خاصیت توزیع‌پذیری (ضرب نسبت به جمع) می‌بینیم که عبارتی خیلی شبیه به خود S به دست می‌آید. داریم:

$$
\begin{aligned}
۳S &= ۳\times۱+۳\times۳+۳\times۳^۲+...+۳\times۳^{۲۳}+۳\times۳^{۲۴}\\
&= ۳+۳^۲+۳^۳+...+۳^{۲۴}+۳^{۲۵}\\
&= (۱+۳+۳^۲+...+۳^{۲۴})-۱+۳^{۲۵} = (S-۱)+۳^{۲۵}
\end{aligned}
$$

بنابراین:

$$۳S = S+۳^{۲۵}-۱ \qquad (۱)$$

«حساب» مباحثی است که به عددهای صحیح، اعشاری‌های با بسط متناهی و عددهای کسری مربوط می‌شود و «جبر» همان جبر مقدماتی‌ای است که در ریاضیات مدرسه‌ای وجود دارد و موضوعاتی را مانند عددهای گنگ، استفادهٔ گسترده از نمادهای ریاضی، معادلات خطی یک یا دو متغیره و معادلهٔ درجهٔ دوم، شامل می‌شود

باز هم بدون اینکه بدانیم مقدار S دقیقاً چند است، قرینهٔ آن (S-) را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم و داریم:

$$(-S)+۳S=(-S)+S+۳^{۲۵}-۱$$

در سمت چپ تساوی از خاصیت پخشی (توزیع‌پذیری) استفاده می‌کنیم:

$$(-S)+۳S=(-۱+۳)S=۲S$$

به این ترتیب:

$$S=\frac{۱}{۲}(۳^{۲۵}-۱) \qquad (۲)$$

و به کمک ماشین‌حساب حاصل را به دست می‌آوریم: $S=۴۲۳,۶۴۴,۳۰۴,۷۲۱$. باید به کلاس‌هشتمی‌ها یادآور شویم که این جواب بدون سختی زیاد به دست آمد.

این اولین ثمرهٔ تفکر مجرد بود: جوابی که به جای انجام محاسبات کورکورانه روی عددهای مشخص، با افزودن استدلال و به رسمیت شناختن الگوهای انتزاعی در انجام محاسبه با عددها در حالت کلی به دست آمده است. برای مثال، ایدهٔ ضرب کردن ۳ در S که معادلهٔ (۱) را نتیجه داد، به اندازهٔ جواب نهایی، مهم و پرفایده بود. ایده از آنجا نشئت گرفت که حاصل جمع توان‌های متوالی عدد۳ اساساً بعد از این ضرب تغییر چندانی نمی‌کند و اکثر جملات، عیناً تکرار می‌شوند. به یک معنا، کاری که برای حل مسئله انجام دادیم، مطلقاً حساب است. چون کاری به جز انجام عملیات حسابی روی عددها (و تنها عددها) انجام نداده‌ایم. در عین حال، به کمک قوانین جمع و ضرب، این عملیات را روی عددهای نامعلوم انجام داده‌ایم. پس در واقع ما حساب تعمیم‌یافته انجام داده‌ایم.

آنچه در عددهای طبیعی یاد می‌گیرند، به آن‌ها کمک خواهد کرد که کسرها را یاد بگیرند؛ چرا که این موضوع‌ها شبیه به هم هستند مدتی باور بر این بود که «کسرها، عددهایی بسیار متفاوت از عددهای طبیعی هستند». این باورِ نادرست مانعی برای یادگیری کسرهاست

این مثال نشان می‌دهد که **اگر قدم را از محاسبه با عددهای مشخص فراتر بگذاریم و برای شناخت الگوهای کلی‌تر سعی کنیم، حتی در مسئله‌های معمولی محاسباتی، نتایج بیشتری به دست خواهیم آورد**. به مسئلهٔ اصلی برگردیم و حاصل $۱+r+r^۲+...+r^{n-۱}+r^n$ را برای r و n دلخواه ($n\in\mathbb{N}$) به دست آوریم. اگر r=۱ باشد، حاصل عبارت n+۱ است و مسئله جذابیتی ندارد. پس از این به بعد فرض کنیم $r\neq ۱$ است. اگر استدلال قبل را با دقت مرور کنیم، دیده می‌شود که اگر عدد ۳ را با r و توان ۲۴ را با n جایگزین کنیم، همهٔ استدلال جمله‌به‌جمله درست خواهد بود. پس هرگاه $r\neq ۱$ عددی دلخواه و n عددی دلخواه و طبیعی باشد:

$$۱+r+r^۲+...+r^{n-۱}+r^n=\frac{r^{n+۱}-۱}{r-۱} \qquad (۳)$$

این همان رابطه‌ای است که برای محاسبهٔ حاصل جمع متناهی جمله از یک دنبالهٔ هندسی داریم. رابطهٔ (۲) حالت خاصی از فرمول (۳) است، وقتی که r =۳ و n =۲۴ باشد. برای اینکه طعم این تعمیم را بهتر بچشیم، بیایید جمع زیر را به‌دست آوریم:

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+...+\frac{۱}{۲^{۲۷}}+\frac{۱}{۲^{۲۸}}$$

این حاصل جمع، سمت چپ تساوی (۳) است، وقتی که: $r=\frac{۱}{۲}$ و $n=۲۸$. بنابراین:

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+...+\frac{۱}{۲^{۲۷}}+\frac{۱}{۲^{۲۸}}=\frac{(\frac{۱}{۲})^{۲۸+۱}-۱}{\frac{۱}{۲}-۱}=۲-(\frac{۱}{۲})^{۲۸}.$$

حالا دربارهٔ تساوی (۳) می‌توانیم از خودمان بپرسیم که: آیا این تساوی بخشی از یک قانون عمومی‌تر در ریاضی است یا نه؟ آیا می‌توانیم آن را در یک زمینهٔ وسیع‌تر ببینیم تا آن را بهتر درک کنیم؟ به راستی که چنین است، به شرطی که برای به دست آوردن این «زمینهٔ وسیع‌تر» از تور بزرگ‌تری استفاده کنیم. کلاس‌هشتمی‌ها اتحاد

مشهور $(x-y)(x-y)=x^2-y^2$ را می‌شناسند که برای هر مقدار x و y درست است. می‌توان از آن‌ها خواست که به‌عنوان تمرین خاصیت توزیع‌پذیری، نشان دهند تساوی زیر برای هر مقدار طبیعیn و هر عدد x و y درست است.

$$(x-y)(x^n+x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\ldots+xy^{n-1}+y^n)=x^{n+1}-y^{n+1} \qquad (۴)$$

حالا تســـاوی $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$، حالـــت خاصی از تســـاوی (۴) اســـت وقتـــی که قـــرار می‌دهیم: $n=1$. حتی تســـاوی (۳) هم حالت خاصی از تســـاوی (۴) اســـت؛ کافی اســـت قرار دهیم: $y=1$ ، $x=r$ و $r\neq 1$. بـــه این ترتیـــب رابطهٔ (۳) که مجموع متناهی جملهٔ دنبالهٔ هندســـی را به دســـت می‌دهد. با تســـاوی آشـــنای $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ ارتباط پیدا می‌کند و این تازه اول داستان است. عدد ۶۴,۳۳۹,۲۸۰,۴۹۱ را در نظر بگیرید. سخت بتوان گفت عددی به این بزرگی اول اســـت یا نه (عدد اول عددی است که فقط بر خودش و یک بخش‌پذیر است). این عدد برابر است با 35^7-4^7 و این یعنی می‌توانیم تساوی (۴) را برای آن استفاده کنیم:

$$64,339,280,491=35^7-4^7=31\times(35^6+35^5\times 4+\ldots+35\times 4^5+4^6)$$

یعنی عدد ما بر ۳۱ بخش‌پذیر اســـت و در نتیجه اول نیست! به همین ترتیب، می‌توان نشان داد که اگر x و y عددهای صحیح مثبت باشند و: $x-y>1$، برای $n\geq 1$ عدد x^n-y^n هیچ‌گاه اول نیست. توجه کنید که ما همچنان درگیر حساب هستیم؛ ولی با استفاده از نمادها به جای عددها و درک، پذیرش و انجام تعمیم در هنگام محاسبات. جمع تعدادی جمله از یک دنبالهٔ هندسی، به کمک تساوی (۴)، به مسئلهٔ تعیین اول یا مرکب بودن عددها مربوط می‌شود. باید چنین مثال‌هایی را از قدرت تعمیم، در کلاس هشتم مورد توجه قرار داد.

ما بر این باوریم که راه‌حل ساده‌تر این است که روی آموزش حساب سالم متمرکز شویم، به جای اینکه سعی کنیم آنچه را که هست دست‌کاری کنیم. باور ما این نیست که آموزش حساب سالم، هدف نهایی است (هر چند هیچ شکی در اهمیت آن وجود ندارد). سودمندی حساب سالم در این است که سکویی برای شروع جبر خواهد شد

موضوع دیگری که در برنامهٔ درســـی جبر مهم به‌شـــمار می‌آید، حل معادله اســـت. موضوعی که در تاریخ جبر هم نقش مهمی در پیشـــبرد این علم داشته است. معادلهٔ خطی $4x+1=2x-3$ را در نظر بگیرید. معمولاً در جبر مدرسه‌ای، x را متغیر در نظر می‌گیریم و با انجام کارهای زیر، معادله را حل می‌کنیم:

مرحلهٔ اول: $(-2x)+4x+1=(-2x)+2x-3$

مرحلهٔ دوم: $2x+1=-3$

مرحلهٔ سوم: $2x+1+(-1)=-3+(-1)$

مرحلهٔ چهارم: $2x=-4$

مرحلهٔ پنجم: $x=-2$

جواب ۲-، جواب درســـتی اســـت، اما با کمی دقت مشخص می‌شـــود که این پنج مرحله هیچ معنایی ندارند. برای مثال، مرحلهٔ اول را در نظر بگیرید. از آنجا که x مقداری است که تغییر می‌کند، چگونه می‌توانیم بگوییم دو مقدار $4x+1$ و $2x-3$ که هر کدام با تغییر x تغییر می‌کنند، با هم برابرند[۳]؟ و چطور می‌توانیم بگوییم که این دو مقدار پس از اضافه کردن $-2x$ (چیزی که خودش مقداری متغیر است) به هر کدام، همچنان با هم برابر می‌مانند؟ در واقع برای عبور از مرحلهٔ ۱ به مرحلهٔ ۲، در هر دو طرف تســـاوی از خاصیت شـــرکت‌پذیری جمع و نیز خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نســـبت به جمع اســـتفاده کردیم. در هر طرف تساوی جملات شـــامل x را با هم جمع کردیم. دانش‌آموزان این قوانین را در حساب خوانده‌اند، اما آنجا این قوانین برای عددها درست بود. کجا برای آن‌ها توضیح داده شده است که می‌توان از این قوانین برای مقدارهای متغیر هم استفاده کرد؟ **این تغییر ناگهانی از محاسبه با عددهای مشخص، به محاسبه با عددهای نامعلوم، ممکن است در درک دانش‌آموزان ناسازگاری ایجاد کند**. ریاضیات قرار است طریقهٔ استدلال کردن را به دانش‌آموزان بیاموزد، یا از بر کردن و تکرار آنچه را که می‌بینند؟

این مورد، یکی از مثال‌های بســـیاری است که نشـــان می‌دهد، ریاضیات مدرسه‌ای چطور در گذر دانش‌آموز از حســـاب به جبر گسســـت ایجاد می‌کند. در اینجا مقصر اصلی رویکردی در آموزش جبر است که پای «متغیرها» را وســـط می‌آورد. این رویکرد برای ادامهٔ کار، ناگزیر به سوءاســـتفاده از خاصیت‌هایی می‌شود که در حساب کاربرد داشتند. این گسست توجیه‌ناپذیر را می‌توان به کمک ایدهٔ حساب تعمیم‌یافته، به‌صورت زیر اصلاح کرد.

اول باید مشـــخص کنیم که یک «معادله» چیســـت. معادلهٔ $4x+1=2x-3$ به این معناست که سؤالی داریم: آیا

برنامهٔ درسی باید هرجا که امکانش هست، فرایند تجرید را در حساب مدرسه‌ای بگنجاند تا فاصلهٔ میان حساب و جبر کم شود. استفاده از نمادها هرجا که موقعیتش فراهم باشد، یکی از گام‌های تجرید است. از همه مهم‌تر این نکته است که استنتاج به کاری جاری و روزمره در حساب بدل شود، چرا که ساختار ریاضیات (در هر سطحی) بر پایهٔ استنتاج بنا شده است

عـــددی چون x وجود دارد که ۳-۲x=۴x+۱؟ چنین عددی را جواب معادلهٔ ۳-۲x=۴x+۱ می‌نامیم. دقت کنید که هیچ حرفی از «متغیر» به میان نیامده اســـت و تنها با عددها ســـروکار داریم. برای حل معادله، فرض کنیم چنین عددی وجود دارد. تأکید می‌کنم که x اینجا یک عدد است. پس داریم تساوی دو عدد ۳ − ۲x و ۱+ ۴x را بررسی می‌کنیم و مراحل ۱ تا ۵، گزاره‌های پی‌درپی در مورد عددها هستند و هر کدام نتیجه‌ای منطقی از مرحلهٔ قبل. در آخر به این نتیجه می‌رســـیم: اگر معادلهٔ ۳-۲x=۴x+۱ جوابی داشـــته باشد، این جواب ۲- است. اما این جواب به ما نمی‌گوید ۲- جواب معادله است، بلکه برای اثبات این موضوع باید در معادله x را با ۲- جایگزین کنیم و ببینیم که واقعاً دو طرف تســـاوی با هم برابر هستند یا خیر. به این ترتیب، تمام مراحل ۱ تا ۵ به‌عنوان عملیات حسابی روی عددهای معلوم یا نامعلوم قابل توضیح‌اند؛ عملیاتی که از درستی آن‌ها اطمینان داریم. پس حل معادله (همان‌طور که مشخص شد هر نوع معادله‌ای) بخشی از حساب تعمیم‌یافته است.

باز هم تأکید می‌کنم که در این راه‌حل، «متغیری[۴]» وجود ندارد (برای توضیح بیشـــتر در این موضوع بخش ۱.۳ و (b ۲۰۱۶) را ببینید).

امیدوارم توضیحات قبل مشـــخص کرده باشـــد که چرا می‌گویم جبر مدرسه‌ای همان حساب تعمیم‌یافته است: این جبر همان حســـاب است در ســـطحی مجردتر. **برنامهٔ درسی باید هرجا که امکانش هســـت، فرایند تجرید را در حساب مدرسه‌ای بگنجاند تا فاصلهٔ میان حساب و جبر کم شود. استفاده از نمادها هرجا که موقعیتش فراهم باشد، یکی از گام‌های تجرید اســـت. از همه مهم‌تر این نکته است که استنتاج به کاری جاری و روزمره در حساب بدل شود، چرا که ساختار ریاضیات (در هر سطحی) بر پایهٔ استنتاج بنا شده است.** شکست برنامهٔ درسی معمول آمریکا[۵] در بر آورده کردن این پیش‌نیازها، علت به‌وجود آمدن گسســـت بین حساب و جبر مدرسه‌ای است و این گسست به یادگیری جبر آسیب می‌رساند. در ادامه، به این امر خواهیم پرداخت که حساب را چگونه بهتر درس دهیم.

● چگونه حساب را بهتر درس دهیم؟

اشاره کردیم که تاکنون تمرکز اصلی حساب در برنامهٔ درسی ریاضیات مدرسه‌ای بر انجام محاسبه‌های دقیق با عددهای معلوم بوده اســـت. از طرف دیگر، در مدرسه تمرکز جبر مقدماتی نیز بر محاسبات است، ولی محاسبات با عددهای معلوم و نامعلوم و با تکیه بر قوانین جابجایی، شرکت‌پذیری جمع و ضرب و توزیع‌پذیری. علاوه بر این، جبر شروع توجه به الگوهای کلی است که در مورد همهٔ عددهای درست‌اند. اکنون، به مشکل دانش‌آموزان در گذر از حساب به جبر می‌پردازیم.

برنامهٔ معمول ریاضیات مدرسه‌ای چندان توجهی به این مشکل ندارد. بعضی از آموزشگران، با آگاهی از سختی این گذر، پیشنهاد کرده‌اند که «تفکر جبری» در سال‌های اولیه آموزش مدرسه‌ای مورد توجه قرار گیرد (برای مثال: بلانتون، ۲۰۱۸؛ کاپوت، ۲۰۰۸؛ و کایرن، ۲۰۰۴). نمی‌توان در نیت خوب آن‌ها شک کرد، ولی همچون همهٔ موارد دیگر در آموزش ریاضی، نیت خوب کافی نیست. چرا که کیفیت چگونگی انجام آن در جزئیات نهفته است. با توجه به اینکه برنامهٔ آموزش مدرســـه‌ای جبر در آمریکا اساساً نادرست است (به وو، ۲۰۱۶ b به‌خصوص بخش‌های ۱,۱ ، ۱,۲ ، ۳,۴، ۱,۵، ۲,۷، ۸,۴، و ۴,۱۰ نـــگاه کنیـــد)[۶]، اولین قدم ما این خواهد بود که دریابیم معنی «تفکر جبری» در زمینهٔ چنین برنامهٔ نادرستی چه می‌تواند باشد، چرا که «چگونگی درک ما از جبر، چگونگی جبرورزی ما را تعیین خواهد کرد.» (کاپوت، ۲۰۰۸، ص. ۸) علاوه بر این، توصیه‌های مرســـوم برای تشـــویق به تفکر جبری در مدرسه، معمولاً با اضافه کردن عناصر جدید به برنامهٔ جاری حســـاب (برای مثال، مســـئله‌های مرسوم به فکری) همراه‌اند و آنچه معیوب است، همان‌گونه که بود، دست نخورده باقی می‌ماند.

ما بر این باوریم که راه‌حل ســـاده‌تر این است که روی آموزش حساب سالم متمرکز شویم، به جای اینکه سعی کنیم آنچه را که هســـت دست‌کاری کنیم. باور ما این نیست که آموزش حساب سالم، هدف نهایی است (هر چند

هیچ شکی در اهمیت آن وجود ندارد). سودمندی حساب سالم در این است که سکویی برای شروع جبر خواهد شد (هفت توصیه زیر با هدف روشن کردن این نگاه نوشته شده‌اند). علاوه بر این، قابلیت یادگرفته شدن حساب سالم بیشتر از حساب معیوب است و نیاز به یادآوری این امر نیست که دانش‌آموزانی که حساب را به درستی یادگرفته‌اند، آمادگی بیشتری برای یادگیری جبر دارند.

در ادامه تلاش خواهم کرد که از کلی‌گویی در مورد برنامهٔ درسی حساب بپرهیزم و فقط به موارد اساسی‌ای اشاره کنم که باید در آموزش حساب تغییر کنند. به همین دلیل ناگزیرم که به شش کتابی[۷] که با هدف چنین تغییری نوشته شده‌اند، به‌طور پی‌درپی اشاره کنم (وو، ۲۰۱۱، ۲۰۱۶ a، ۲۰۱۶ b، در دست انتشار). در واقع، این کتاب‌ها با هدف ایجاد تغییرات کلی و همه‌جانبه در محتوای ریاضیِ ریاضیات مدرسه‌ای نوشته شده‌اند[۸]. اما تمرکز نوشتهٔ حاضر فقط روی تغییراتی[۹] است که باید در آموزش حساب ایجاد شوند تا مسیر آشنایی دانش‌آموزان با جبر هموار شود.

۱. باید برای الگوریتم‌های استاندارد حساب (علاوه بر تصویرها و قیاس‌ها) توضیحات ریاضی متناسب با هر پایهٔ تحصیلی ارائه شود. به‌طور خاص باید بر اهمیت قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری جمع در الگوریتم‌های استاندارد جمع و تفریق (وو۲۰۱۱، ص. ۶۸؛ وو۲۰۰۰،ص.۴۶ و ص.۴۹) و همچنین بر نقش اساسی قانون توزیع‌پذیری در الگوریتم‌های استاندارد ضرب و تقسیم طولانی (وو۲۰۱۱، ص.۸۵؛ وو ۲۰۰۰، ص.۶۲، و ص.۸۲) تأکید کرد. پس از آشنایی با چرایی درستی الگوریتم‌ها، دانش‌آموزان درک بهتری از آن‌ها و چگونگی عملکرد آن‌ها پیدا خواهند کرد. (وو، ۲۰۱۱، فصل۲؛ وو۲۰۰۰، فصل۲). در حال حاضر، یکی از دلایلی که معلم‌ها و دانش‌آموزان این قوانین را جدی نمی‌گیرند، این است که برنامهٔ حساب هیچ استفادهٔ ریاضی جدی از آن‌ها نمی‌کند. در نتیجه تنها خاصیت این قوانین آن است که برای کسب نمرهٔ خوب در آزمون‌های سراسری حفظ شوند.

۲. **حتی در حساب، دانش‌آموزان باید تجربه‌ای از تجرید و ساختار کسب کنند. در واقع، پیغام اصلی چهار الگوریتم استاندارد این است که اگر یاد بگیریم چگونه با عددهای تک‌رقمی محاسبه کنیم، قادر خواهیم بود هر محاسبه‌ای را با دیگر عددهای طبیعی، هر چقدر هم که بزرگ باشند، انجام دهیم** (وو، ۲۰۱۱، فصل۳ و در سراسر فصل‌های ۴ تا ۷؛ وو۲۰۰۰، صص.۳۸-۴۰). اگر این پیغام را به دانش‌آموزان یادآوری و در موقعیت‌های مختلف به آن اشاره کنیم، آن‌گاه آن‌ها نه‌تنها متوجه ارزش یادگیری الگوریتم‌ها خواهند شد، بلکه تجربه‌ای از تفکر مجرد به دست خواهند آورد و وقتی به جبر می‌رسند کمتر شوکه خواهند شد (در واقع، اگر معلم‌ها مجبور بودند که پیغام اصلی را به‌طور مکرر در تدریس خود یادآوری کنند، شاید در قانع کردن دانش‌آموزان برای حفظ کردن جدول ضرب موفق‌تر بودند).

۳. به همین ترتیب باید برای دانش‌آموزان، بر اهمیت معنای برابری کسرها (وو،۲۰۱۱، فصل ۱۳؛ وو a ۲۰۱۶، بخش ۱،۳، وو ۲۰۰۱، بخش ۳) تأکید و نقش آن را در همهٔ آنچه به کسرها مربوط است، پررنگ‌کنیم: نقش صریح آن در مقایسهٔ کسرها (وو a ۲۰۱۶، صص. ۳۱-۳۵؛ وو ۲۰۰۱، بخش۵)، جمع و تفریق کسرها (وو a ۲۰۱۶، بخش۱،۴؛ وو ۲۰۰۱، بخش۶) و ضرب و تقسیم کسرها (وو a ۲۰۱۶، بخش‌های ۱،۵ و ۱،۶؛ وو a ۲۰۱۰، صص. ۳۳-۳۷ و ص. ۷۲). بدون درک نقش محوری مفهوم مجرد برابری کسرها، محاسبه‌های مربوط به کسرها مهارت‌هایی جدا از هم خواهد بود و دانش‌آموزان می‌پندارند که تنها استفاده از قضیه برابری کسرها، در ساده‌کردن کسرهاست.

۴. اعشاری‌های متناهی باید به‌عنوان دستهٔ خاصی از کسرها (کسرهای اعشاری) تعریف و آموزش داده شوند (وو ۲۰۱۱، بخش ۱۲،۳؛ وو ۲۰۱۰a، صص. ۲۰-۲۲). این روش هم از لحاظ تاریخی و هم از لحاظ آموزشی صحیح است؛ فقط از این نقطه‌نظر که چهار عمل اصلی روی اعشاری‌ها و به‌خصوص ضرب اعشاری، واضح خواهد شد و البته که وضوح، شرط لازم برای قابل یادگیری بودن است (وو ۲۰۱۱، بخش۱۴،۲، ص.۲۵۶، ص.۲۶۹؛ وو۲۰۱۱، بخش ۱۸،۴؛ وو a ۲۰۱۰ صص. ۴۸-۴۹، ۵۶-۶۶ و ۷۶-۷۹). **درک اینکه دو دستهٔ به نظر متفاوت از عددها، اساساً یک چیز هستند، فرصت دیگری را برای دانش‌آموزان فراهم می‌کند که اهمیت تجرید و ساختار را تجربه کنند.**

۵. باید تأکید شود، اعمال مربوط به کسرها در راستای اعمال مربوط به عددهای طبیعی قرار دارند (وو، ۲۰۱۱، صص. ۱۷۳-۱۷۴،۲۲۱، ۲۶۲ و ۲۸۴-۲۸۶؛ وو ۲۰۰۱، صص. ۴۶-۶۳، ۸۱-۸۲). اینکه درک این هم‌راستایی، قابلیت یادگیری کسرها را افزایش خواهد داد، چنان آشکار است که به هیچ توضیحی نیاز نیست. آنچه

حتی در حساب، دانش‌آموزان باید تجربه‌ای از تجرید و ساختار کسب کنند. در واقع، پیغام اصلی چهار الگوریتم استاندارد این است که اگر یاد بگیریم چگونه با عددهای تک‌رقمی محاسبه کنیم، قادر خواهیم بود هر محاسبه‌ای را با دیگر عددهای طبیعی، هر چقدر هم که بزرگ باشند، انجام دهیم

به همان اندازه اهمیت دارد ولی کمتر آشکار است، این موضوع است که این هم‌راستایی، تجربهٔ دیگری از درک تجرید و ساختار را برای دانش‌آموزان فراهم می‌کند: آنچه در عددهای طبیعی یاد می‌گیرند، به آن‌ها کمک خواهد کرد که کسرها را یاد بگیرند؛ چرا که این موضوع‌ها شبیه به هم هستند. مدتی باور بر این بود که «کسرها، عددهایی بسیار متفاوت از عددهای طبیعی هستند». این باورِ نادرست مانعی برای یادگیری کسرهاست (در سال‌های اخیر تلاش‌هایی برای کم‌رنگ کردن این باور انجام گرفته است؛ به Common Core، 2010 نگاه کنید).

۶. آموزش کسرها باید به روشی متناسب با پایه تحصیلی به تجرید و عمومیت موضوع وفادار باشد. هم‌اکنون تقریباً باور عمومی بر این است (برای مثال Common Core، 2010) که از لحاظ آموزشی، مؤثرتر است که کسرها به‌طور مشخصی تعریف شوند. مثلاً به‌عنوان نقطه‌ای روی محور عددها (جنسن، ۲۰۰۳؛ وو، ۲۰۰۱) به جای اینکه به دانش‌آموزان بباورانیم که یک کسر، هم یک قطعه پیتزاست، هم تقسیم است، و هم نسبت. اگر تلاش کنیم که واقعیت‌های متفاوت مربوط به کسرها را به‌طور موجز و دقیق ارائه دهیم، دانش‌آموزان به‌طور طبیعی (و به تدریج) با عمومیت و استفاده از نمادها آشنا خواهند شد. می‌توان با ریاضیاتی سالم کسرها را این‌چنین ارائه داد[۱۰] (جنسن، ۲۰۰۳؛ وو ۲۰۱۱، قسمت۲). برای مثال، قضیهٔ تساوی کسرها، گزاره‌ای است که بیان می‌کند، برای هر کسر $\frac{m}{n}$ و برای هر عدد طبیعی c، داریم:

$$\frac{m}{n}=\frac{cm}{cn}$$

به همین ترتیب «ضرب ضربدری» صورت و مخرج دو طرف یک تساوی را (که یکی از مهم‌ترین مهارت‌ها در کار با کسرهاست)، می‌توان به این شکل بیان کرد که برای هر دو کسر، $\frac{m}{n}$ و $\frac{k}{l}$، رابطهٔ $\frac{m}{n}=\frac{k}{l}$ هم‌ارز است با $ml=kn$ (و همچنین، در فرایند یادگیری این مهارت است که دانش‌آموزان معنای «هم‌ارز است» را یاد خواهند گرفت). فرمول جمع دو کسر دلخواه به شکل زیر است:

$$\frac{m}{n}=\frac{k}{l}=\frac{(ml+kn)}{nl}$$

و به همین ترتیب برای فرمول‌های دیگر. دانش‌آموزانی که در معرض چنین بیان نمادینی از کلیت قرار دارند، مسیر هموارتری را به سمت جبر طی خواهند کرد.

۷. بالاخره، ما باید همهٔ تلاش خود را به این امر معطوف کنیم که برای هر ادعایی در حساب، دلیلی ارائه دهیم. در حساب می‌توان با حفظ و تمرین کردن مهارت‌ها، محاسبات را به درستی انجام داد. اما به سختی می‌توان جبر را با حفظ کردن یاد گرفت. جبر حساب تعمیم‌یافته است و موضوع کلیدی آن بیان گزاره‌های کلی دربارهٔ عددهاست (بیشتر اوقات همهٔ عددها). استدلال تنها وسیله برای پیمودن قلمرو جبر است و بنابراین ما ناچاریم از همان روز اول دانش‌آموزان را در معرض استدلال قرار دهیم (وو ۲۰۱۱، a ۲۰۱۶، b ۲۰۱۶).

در این نوشتهٔ کوتاه، ما تلاش کردیم که معنای جبر را به‌عنوان حساب تعمیم‌یافته روشن کنیم و برای بهبود برنامهٔ درسی حساب پیشنهادهایی ارائه دهیم که عبور دانش‌آموزان را از حساب به جبر هموار می‌کند. نباید تظاهر کنیم که انجام چنین اصلاحاتی آسان است، چرا که نیازمند توسعهٔ حرفه‌ای و پایدار معلمان و خلق کتاب‌های درسی خوب برای دانش‌آموزان است؛ اما باید تلاش کرد.

ما باید همهٔ تلاش خود را به این امر معطوف کنیم که برای هر ادعایی در حساب، دلیلی ارائه دهیم. در حساب می‌توان با حفظ و تمرین کردن مهارت‌ها،محاسبات را به درستی انجام داد. اما به سختی می‌توان جبر را با حفظ کردن یاد گرفت جبر حساب تعمیم‌یافته است و موضوع کلیدی آن بیان گزاره‌های کلی دربارهٔ عددهاست (بیشتر اوقات همهٔ عددها). استدلال تنها وسیله برای پیمودن قلمرو جبر است و بنابراین ما ناچاریم از همان روز اول دانش‌آموزان را در معرض استدلال قرار دهیم

یک موضوع روشن است. راهبرد حذف تجرید از حساب، با این هدف طراحی شده است که به دانش‌آموزان القا کند می‌توانند در نبرد با محاسبات پیروز شوند، بدون اینکه به انجام تفکر انتزاعی نیاز داشته باشند. متأسفانه این راهبرد باعث می‌شود دانش‌آموزان در مواجه با نمادها، تجرید و تعمیم دچار شوک شوند. این راهبرد باعث شکست دانش‌آموزان در مواجه با جبر می‌شود. اگر ما برنامهٔ درسی حساب را اصلاح نکنیم، ما هم در همان مواجه شکست می‌خوریم.

تذکر: مقاله حاضر از «ویکی‌نوشت آموزش ریاضی»، شماره ۹ و ۱۰ آن، اقتباس شده است.

«ویکی‌نبشـــته» یا «ویکی‌نوشت» نوعی «کتابخانه دیجیتال آزاد» شامل کتاب‌ها، مطبوعات، سندها و دیگر نوشتارهای آزاد است که به عنوان منابع کلاسیک و بدون دگرگونی و تحریف در دسترس عموم قرار می‌گیرند. «ویکی‌نوشت آموزش ریاضی» به آدرس https://maths4maryams.org/mathed/farsi نیز در سال ۱۳۹۶ و پس از درگذشت پروفسور مریم میرزاخانی، با تأسیس وبگاه maths4maryams.org توسط دکتر امیرحسین اصغری ایجاد شد. این وبگاه، ویکی‌نوشته‌ها را ترکیبی غنی از تجربه و تحقیق توصیف کرده است که برای اولین بار منتشر شده‌اند. این سایت امکان تبادل نظر دربارهٔ این نوشته‌ها را نیز فراهم کرده است.

پی‌نوشت‌ها

* مایلم از لری فرانسیس به خاطر بحث‌ها و تصحیح‌ها و از امیرحسین اصغری برای پیشنهادهای ارزشمندش تشکر کنم.

۱. وو، هانگ (دی‌ماه ۱۳۹۷)، از حساب به جبر، قسمت اول: جبر، حساب تعمیم‌یافته است، ویکی نوشت شمارهٔ ۹.

۲. باید تأکید کنیم که اشارهٔ ما به گسست برنامهٔ درسی ریاضیات مدرسه‌ای در آمریکا مربوط است، نه به خود ریاضیات.

۳. برای مثال، چون x تغییر می‌کند، می‌تواند مثلاً صفر باشد؛ در این صورت: $4x+1=1$ و $2x-3=-3$ و در نتیجه: $-3=1$!!!

۴. تأکید می‌کنم که متغیر یک مفهوم ریاضی نیست، نقطه، سرخط! اگر دانش‌آموزان به‌گونه‌ای آموزش داده شوند که با نمادها درست کار کنند، نیازی نخواهند داشت نگران این باشند که «متغیر» چیست (وو ۲۰۱۶ b، بخش ۱و ۱).

۵. تلاش کرده‌اند از سال ۲۰۱۸، بیشتر مدارس آمریکا تلاش خواهند کرد که از برنامهٔ درسی مشترکی (Common Core) استفاده کنند. اینکه نتیجهٔ این تصمیم چه خواهد بود، هنوز معلوم نیست.

۶. همین حرف را می‌توان دربارهٔ کلیت برنامهٔ درسی کنونی ریاضی در آمریکا گفت (وو، ۲۰۱۸، بخش ۳. ۲. و پیوست۲). اگر چه به نظر نمی‌رسد آمریکا تنها کشوری باشد که دارای چنین مشکلاتی در برنامهٔ درسی است.

۷. نسخه‌های اولیهٔ این کتاب‌ها به‌طور رایگان در فضای مجازی در دسترس است (وو، ۲۰۰۰؛ ۲۰۰۱؛ ۲۰۱۰ a؛ ۲۰۱۰ b).

۸. هدف این است که آنچه من ریاضیات کتاب درسی مدرسه (وو ۲۰۱۸، بخش ۳. ۲ و پیوست۲) می‌نامم، به‌طور کلی از تمام دوره‌های تحصیلی حذف شود. شش کتاب مورد اشاره با این هدف نوشته شده‌اند که نشان بدهند می‌توان ریاضیات کتاب درسی را با ریاضیات سالم و در عین حال متناسب با دورهٔ تحصیلی موردنظر جایگزین کرد.

۹. چون این مقاله کوتاه است، به ناچار، بعضی از مفاهیم مهم در برنامهٔ حساب مدرسه، به‌خصوص مفاهیم سرعت ثابت (۲۰۱۶ b، بخش ۲،۷) و شیب (۲۰۱۶ b، بخش ۴. ۳). در اینجا مورد بحث قرار نمی‌گیرند.

۱۰. روش معرفی کسرها در وو (۲۰۱۶ a) اندکی پیچیده‌تر است. ولی ناچار بودم آن را ذکر کنم، چون همان روش، مورد استفادهٔ استانداردهای برنامه درسی قرار گرفت.

منابع

1. Common Core (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Retrieved from: http://www.corestandards.org/Math/

2. Schmid, W. and Wu, H. (2008) The major topics of school algebra (March 31, 2008). https://math.berkeley.edu/~wu/NMPalgebra7.pdf

3.Wu, H. (2016b). *Teaching School Mathematics: Algebra*. Providence, RI: American Mathematical Society. Its *Index* is available at: http://tinyurl.com/haho2v6

4. Wu, H. (to appear). *Rational Numbers to Linear Equations, Algebra and Geometry, and Pre-Calculus, Calculus, and Beyond.*

5. Blanton, M. L. (2018) Empowering Children to Think Algebraically. Retrieved from: https://tinyurl.com/ybs8sm9h

6. Jensen, G. (2003). Arithmetic for Teachers. Providence, RI: American Mathematical Society.

7. Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the Early Grades, 5-17. New York: Lawrence Erlbaum Associates.

8. Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? The Mathematics Educator, 8, 139-151. Retrieved from: https://tinyurl.com/ybsnlycr

9. Wu, H. (2000). Chapter 1: Whole Numbers (Draft) (July 15, 2000; Revised September 1, 2002). https://math.berkeley.edu/~wu/EMI1c.pdf

10. Wu, H. (2001). Chapter 2: Fractions (Draft) (June 20, 2001; Revised September 3, 2002). https://math.berkeley.edu/~wu/EMI2a.pdf

11. Wu, H. (2010a). Pre-Algebra (Draft of textbook for teachers of grades 6-8) (April 21, 2010). https://math.berkeley.edu/~wu/Pre-Algebra.pdf

12. Wu, H. (2010b). Introduction to School Algebra (Draft of textbook for teachers of grades 6-8) (August 14, 2010).

13. Wu, H. (2011). Understanding numbers in elementary school mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society.

14. Wu, H. (2016a). Teaching School Mathematics: Pre-Algebra. Providence, RI: American Mathematical Society. Its Index is available at: http://tinyurl.com/zjugvl4Wu, H. (2016b). Teaching School Mathematics: Algebra. Providence, RI: American Mathematical Society. Its Index is available at: http://tinyurl.com/haho2v6

15.Wu, H. (2018). The content knowledge mathematics teachers need, in Mathematics Matters in Education. Essays in Honor of Roger E. Howe, Y. Li, J. Lewis, and J. Madden (eds.). Springer, Dordrecht (2018). 43-91. https://math.berkeley.edu/~wu/Contentknowledge1A.pdf